



## Avaliação da deformação de lajes nervuradas considerando a não-linearidade física: comparação entre valores teóricos e experimentais

Oliveira, R. S.(1); Araújo, D. L.(1); Corrêa, M. R. S.(2); Ramalho, M. A.(2)

(1) aluno do programa de doutorado da EESC - USP.

(2) professor do Dept.o de Eng. de Estruturas da EESC - USP.

### RESUMO

Nos últimos anos é crescente o emprego de lajes nervuradas na construção de edifícios devido às vantagens provenientes da utilização desse partido estrutural em relação ao sistema convencional de laje e viga, entre as quais destaca-se a liberdade na disposição dos espaços internos. Acompanhando esse crescimento, observa-se a necessidade de ampliação do conhecimento técnico sobre o comportamento mecânico das lajes nervuradas, em especial com relação às deformações, que podem inviabilizar as suas condições de serviço.

Uma contribuição razoável para estimarem-se com maior exatidão os deslocamentos de pavimentos de concreto armado consiste na inclusão da não-linearidade física do material concreto armado em modelos teóricos programáveis através do método dos elementos finitos. Neste trabalho são utilizadas duas formulações para a incorporação da não-linearidade física, aplicáveis ao pavimento de concreto armado: a formulação empírica proposta por Branson e um modelo simplificado que baseia-se em uma relação constitutiva entre momento fletor e curvatura a partir de um diagrama trilinear cujos pontos de inflexão coincidem com os limites dos estádios I, II e III do comportamento mecânico do concreto armado. Analisa-se um exemplo e comparam-se os resultados experimentais aos resultados teóricos obtidos com diversas modelagens, tanto em regime elástico linear quanto em regime não-linear.

### 1. INTRODUÇÃO

A crescente tendência arquitetônica do uso de espaços mais amplos, aliada à tentativa de um aproveitamento mais eficiente do concreto com um conseqüente alívio do peso próprio, tem ocasionado uma maior utilização das lajes nervuradas.

As lajes nervuradas compõem um subsistema estrutural no qual a mesa de concreto resiste aos esforços de compressão e as armaduras aos esforços de tração, sendo que a nervura de concreto faz a ligação mesa-armadura. As nervuras funcionam como uma malha de vigas formando uma grelha. Por causa dos vazios, a resistência à torção diminui bastante quando comparado a uma laje maciça de mesma espessura. Para compensar esse efeito e a excessiva flexibilidade, aumenta-se sua altura, de modo que a laje nervurada tem, geralmente, uma altura maior do que uma laje maciça equivalente.

As vantagens desse subsistema estrutural em relação aos demais existentes, segundo BARBIRATO (1997), “referem-se não só à maior liberdade no projeto arquitetônico mas, principalmente, à economia de material, à redução do peso próprio da estrutura, à menor suscetibilidade da estrutura a deslocamentos transversais, e à possibilidade de se utilizarem capitéis nas proximidades dos pilares, onde as tensões normais e cisalhantes são elevadas”.

Uma particularidade desse subsistema estrutural reside no fato de que os vãos livres praticados são, em geral, maiores que os praticados no sistema convencional de viga e laje. A determinação de deslocamentos do pavimento são normalmente determinados através de análises elástico lineares. A inclusão da não-linearidade física do material concreto armado para a determinação dos deslocamentos de pavimentos pode proporcionar uma maior representatividade do comportamento da estrutura. Este trabalho enfoca duas formulações para a incorporação da não-linearidade física: a formulação empírica proposta por Branson, e um modelo simplificado apresentado por OLIVEIRA (1997) que baseia-se em uma relação constitutiva entre momento fletor e curvatura a partir de um diagrama

## Avaliação da deformação de lajes nervuradas considerando a não-linearidade física: comparação entre valores teóricos e experimentais

Oliveira, R. S.(1); Araújo, D. L.(1); Corrêa, M. R. S.(2); Ramalho, M. A.(2)

(1) aluno do programa de doutorado da EESC - USP.

(2) professor do Dept.o de Eng. de Estruturas da EESC - USP.

trilinear cujos pontos de inflexão coincidem com os limites dos estádios I, II e III do comportamento mecânico do concreto armado.

Como exemplo de aplicação é analisada uma laje nervurada, em modelo reduzido, apresentada por KLEIN;SELISTRE (1997). Os resultados experimentais de deslocamentos monitorados pelo referido autor são comparados aos resultados numéricos obtidos segundo dois tipos de análise: análise elástica linear (em modelos de grelha e de laje equivalente) e não-linear.

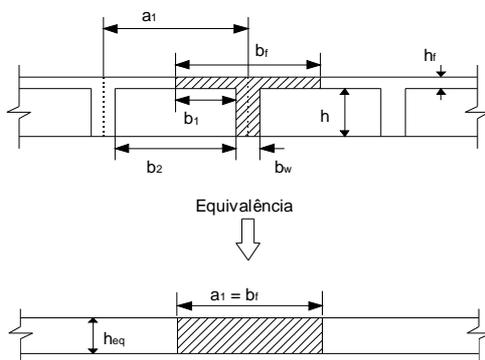
### 1.1 Comportamento Estático das Lajes Nervuradas

As lajes nervuradas são constituídas por um conjunto de vigas (nervuras), solidarizadas entre si pela mesa, apresentando um comportamento estático intermediário entre placa e grelha. O cálculo dos esforços solicitantes e dos deslocamentos das lajes nervuradas pode ser feito utilizando-se métodos baseados na teoria das grelhas e na analogia de placas.

Os esforços solicitantes no modelo de grelha são calculados por processos estáticos, tais como o processo dos esforços e o processo dos deslocamentos. As barras desse modelo são formadas pela composição da nervura com a largura colaborante da mesa, compondo uma seção “T”. Essa largura colaborante pode ser obtida de acordo com o item 3.2.2.2 da NBR-6118 e que, nos casos usuais, corresponde à distância livre entre nervuras.

Os métodos baseados na analogia de placas correspondem à transformação da laje nervurada numa laje maciça de rigidez à flexão equivalente. Tal equivalência proporciona resultados satisfatórios no que se refere ao comportamento elástico linear da estrutura.

A determinação da laje maciça de rigidez à flexão equivalente à laje nervurada baseia-se no conceito de “Espessura Equivalente”, como descrito em BARBIRATO (1997). O procedimento consiste em transformar a laje nervurada numa laje de espessura constante (**figura 1**). A laje nervurada é considerada isótropa se as nervuras forem igualmente espaçadas nas duas direções, e ortótropa em caso contrário.



$a_1$  = distância entre os eixos das nervuras

$b_r$  = largura da mesa da seção T

$b_1$  = parte da laje incorporada à seção T, de acordo com a NBR-6118

$b_2$  = distância livre entre nervuras

$b_w$  = largura da nervura

$h$  = altura livre da nervura

$h_r$  = espessura da mesa da seção T

$h_{eq}$  = espessura da laje maciça equivalente

**Figura 1** - Transformação da laje nervurada em laje maciça equivalente (BARBIRATO (1997))



## Avaliação da deformação de lajes nervuradas considerando a não-linearidade física: comparação entre valores teóricos e experimentais

Oliveira, R. S.(1); Araújo, D. L.(1); Corrêa, M. R. S.(2); Ramalho, M. A.(2)

(1) aluno do programa de doutorado da EESC - USP.

(2) professor do Dept.o de Eng. de Estruturas da EESC - USP.

A espessura equivalente da laje pode ser calculada através da expressão  $h_{eq} = (12.I/a_1)^{1/3}$

(na qual  $I$  é o momento de inércia à flexão da seção transversal “T” no Estádio I, e em relação a um eixo baricêntrico paralelo ao plano do pavimento), que representa uma equivalência apenas em momento de inércia à flexão. Diferentes espessuras podem ser obtidas através de equivalências em momento de fissuração ou em módulo de resistência.

### 2. ANÁLISE ESTRUTURAL

As lajes nervuradas, assim como a maioria das estruturas de concreto armado convencionais, podem ser analisadas por modelos lineares e não-lineares.

Os modelos lineares admitem que os materiais componentes das estruturas comportem-se segundo um regime elástico linear. Os modelos não-lineares permitem considerar um comportamento em regime elastoplástico, viscoelástico, viscoplástico ou elasto-viscoplástico. Neste trabalho, adota-se a denominação não-linear para os modelos que permitem simular o comportamento “elastoplástico” do concreto armado.

A análise de pavimentos de edifícios de concreto armado com a consideração da não-linearidade física pode oferecer grandes vantagens ao projetista de estruturas com relação à análise em regime elástico linear. Primeiramente, coloca-se a possibilidade de uma avaliação mais realista sobre os efeitos de perda de rigidez dos elementos estruturais por fissuração e escoamento das armaduras longitudinais tracionadas. Com a perda de rigidez dos elementos, podem haver acréscimos de deslocamentos tais que venham a inviabilizar um conjunto de formas em função do estado limite de utilização por deformações excessivas. Por outro lado, para estruturas que não apresentem problemas quanto aos deslocamentos, pode-se utilizar o fato da perda de rigidez em determinadas peças estruturais, e com isso promover-se uma uniformização dos esforços no domínio do pavimento através da eliminação de picos de momentos fletores concentrados em determinadas regiões, como por exemplo, sobre os pilares. Através desse procedimento, criam-se novas possibilidades ao projetista que, a partir de um conjunto de formas, pode determinar vários estados de solicitação das peças estruturais, apenas alterando as taxas de armadura longitudinais dos elementos, e por conseguinte, as suas rigidezes.

A seguir são descritos, concisamente, dois processos para avaliação do comportamento não-linear dos subsistemas estruturais formados por lajes nervuradas.

#### 2.1 *Formulação Empírica Proposta por BRANSON*

A formulação proposta por BRANSON caracteriza-se pela redução progressiva do momento de inércia médio ( $I_m$ ) da seção (entre os Estádios I e II puro), de acordo com o valor do momento fletor atuante ( $M$ ). Para isso, BRANSON propôs uma função interpoladora que aproxima o momento de inércia do elemento estrutural para o valor mais provável que esse elemento fletido deveria apresentar para cada valor de solicitação por momento fletor acima do relativo à fissuração da peça ( $M_r$ ), como colocado na expressão (1).

$$I_m = \left(\frac{M_r}{M}\right)^4 \cdot I_I + \left\{1 - \left(\frac{M_r}{M}\right)^4\right\} \cdot I_{II,0} \quad (1)$$



## Avaliação da deformação de lajes nervuradas considerando a não-linearidade física: comparação entre valores teóricos e experimentais

Oliveira, R. S.(1); Araújo, D. L.(1); Corrêa, M. R. S.(2); Ramalho, M. A.(2)

(1) aluno do programa de doutorado da EESC - USP.

(2) professor do Dept.o de Eng. de Estruturas da EESC - USP.

Essa expressão é facilmente implementada em programas computacionais baseados na teoria das grelhas. O carregamento total é dividido em parcelas iguais e, para cada parcela, são calculados os esforços na grelha. Em seguida, o momento fletor atuante nos dois nós de cada elemento de barra é comparado ao respectivo momento fletor de fissuração que, quando superado, impõe uma correção ao momento de inércia do elemento conforme a expressão (1). Resolve-se a grelha sucessivas vezes empregando-se os novos valores de momentos de inércia até que os resíduos resultantes entre dois processamentos consecutivos sejam desprezíveis. Maiores esclarecimentos podem ser obtidos em CARVALHO (1994).

### 2.2 Modelo Não-linear Simplificado

Os modelos não-lineares físicos podem ser formulados de inúmeras maneiras. Quanto à discretização da seção transversal, existem modelos que a idealizam constituída por camadas superpostas, nas quais distinguem-se tanto o concreto como o aço em regime de tração ou compressão individualmente. Quanto às teorias, podem ser citadas a teoria elastoplástica, a teoria do dano e a da fratura, dentre outras. O modelo empregado neste trabalho foi apresentado por OLIVEIRA (1997) e adota, simplificada, uma relação constitutiva entre momento fletor e curvatura trilinear para o concreto armado, respeitando-se, basicamente os limites dos Estádios I, II e III para a caracterização dos patamares de rigidez e parâmetros de encruamento da seção transversal de concreto armado. Para a laje, é adotado o critério de escoamento de von Mises bidimensional, e para os elementos de barra estabelece-se um critério uniaxial.

Os elementos estruturais do pavimento de concreto armado são as lajes, representadas por elementos finitos de placa de formulação livre denominado T3AF em Estado Plano de Tensões (EPT), e as vigas, representadas pelos elementos de barra de grelha (CORRÊA (1991)).

### 3. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Coloca-se, a seguir, um exemplo para a aferição dos modelos lineares e não-lineares enfocados neste trabalho. Os resultados de deslocamentos obtidos das análises numéricas são comparados aos resultados experimentais obtidos por KLEIN;SELISTRE (1997). Nesse trabalho, os autores apresentaram os resultados experimentais de deslocamentos de um pavimento em laje nervurada em modelo reduzido (escala 1/7,5) e carregado uniformemente. A forma e a armadura da laje é mostrada na figura 2. O carregamento total aplicado foi de 7,5 kN/m<sup>2</sup> (incluindo o peso próprio) uniformemente distribuído em todo o pavimento. No ensaio, o carregamento total foi aplicado em 5 incrementos, sendo o primeiro correspondente a 1/3 da carga total e os demais a 1/6 cada um.

Para a análise em regime elástico linear foram utilizados dois modelos de cálculo: o de grelha e o de laje equivalente. Em cada um desses modelos foram feitas duas considerações distintas quanto à rigidez à torção: uma primeira considerando toda a rigidez à torção dos elementos estruturais no Estádio I e outra desprezando a rigidez à torção dos elementos (utilizando-se apenas 1% de sua capacidade calculada no Estádio I). Os processamentos em regime linear foram executados com o sistema LASER apresentado por RAMALHO (1990) e CORRÊA (1991).

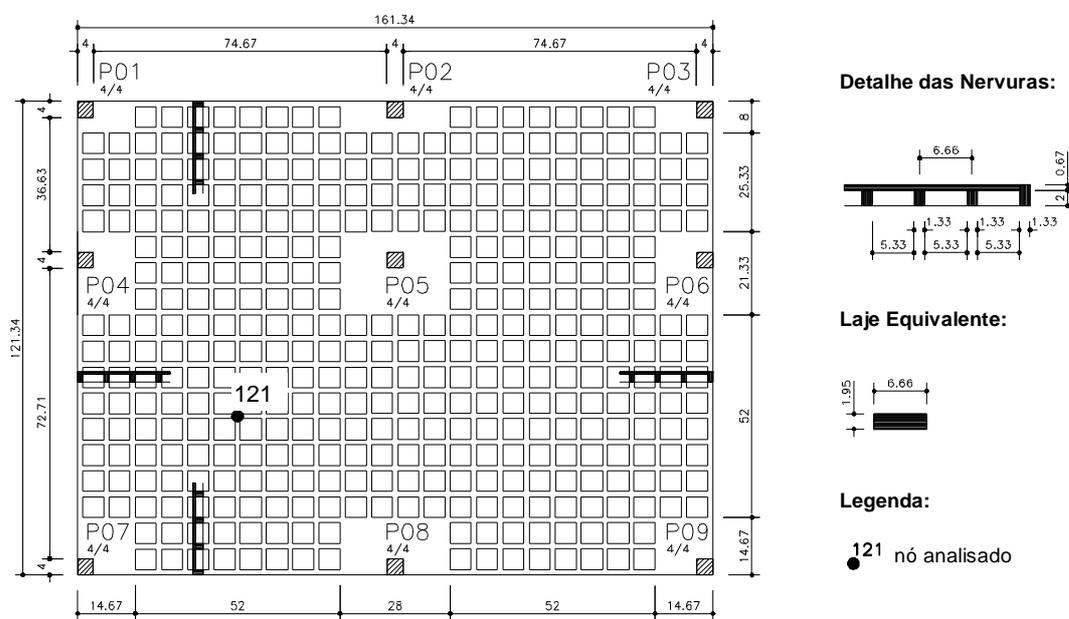
## Avaliação da deformação de lajes nervuradas considerando a não-linearidade física: comparação entre valores teóricos e experimentais

Oliveira, R. S.(1); Araújo, D. L.(1); Corrêa, M. R. S.(2); Ramalho, M. A.(2)  
 (1) aluno do programa de doutorado da EESC - USP.  
 (2) professor do Dept.o de Eng. de Estruturas da EESC - USP.

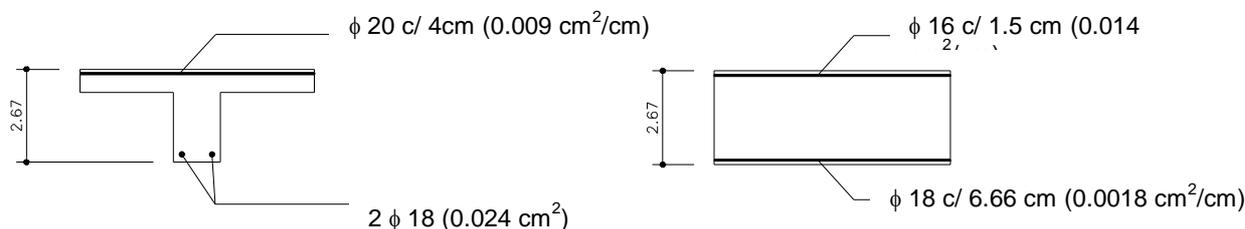
Na análise do pavimento como grelha, as nervuras foram substituídas por elementos de barra e os capitéis por elementos de placa. As seguintes características geométricas foram utilizadas:

- elemento de barra :** Momento de inércia à flexão ( $I$ ) =  $4,02 \text{ cm}^4$   
 Momento de inércia à torção ( $J_t$ ) =  $2,07 \text{ cm}^4$
- elemento de placa :** Espessura ( $h$ ) =  $2,67 \text{ cm}$

Na análise do pavimento como laje equivalente, a espessura do elemento de placa foi determinada com base na equivalência de rigidez à flexão das nervuras. Os valores obtidos para as dimensões dessa laje equivalente podem ser observados na figura 2a.



(a) - Forma do pavimento (medidas em "cm")



(b) - Armação das nervuras e capitéis do pavimento (bitolas dos arames: BWG)

**Figura 2** - Forma e armação do pavimento em laje nervurada ensaiado por KLEIN;SELISTRE (1997).

Os materiais utilizados foram:

## Avaliação da deformação de lajes nervuradas considerando a não-linearidade física: comparação entre valores teóricos e experimentais

Oliveira, R. S.(1); Araújo, D. L.(1); Corrêa, M. R. S.(2); Ramalho, M. A.(2)

(1) aluno do programa de doutorado da EESC - USP.

(2) professor do Dept.o de Eng. de Estruturas da EESC - USP.

### microconcreto:

$$f_{cj} = 2,77 \text{ kN/cm}^2$$

$$f_{ctk} = 0,236 \text{ kN/cm}^2$$

$$\text{coef. de Poisson } (\nu) = 0.20$$

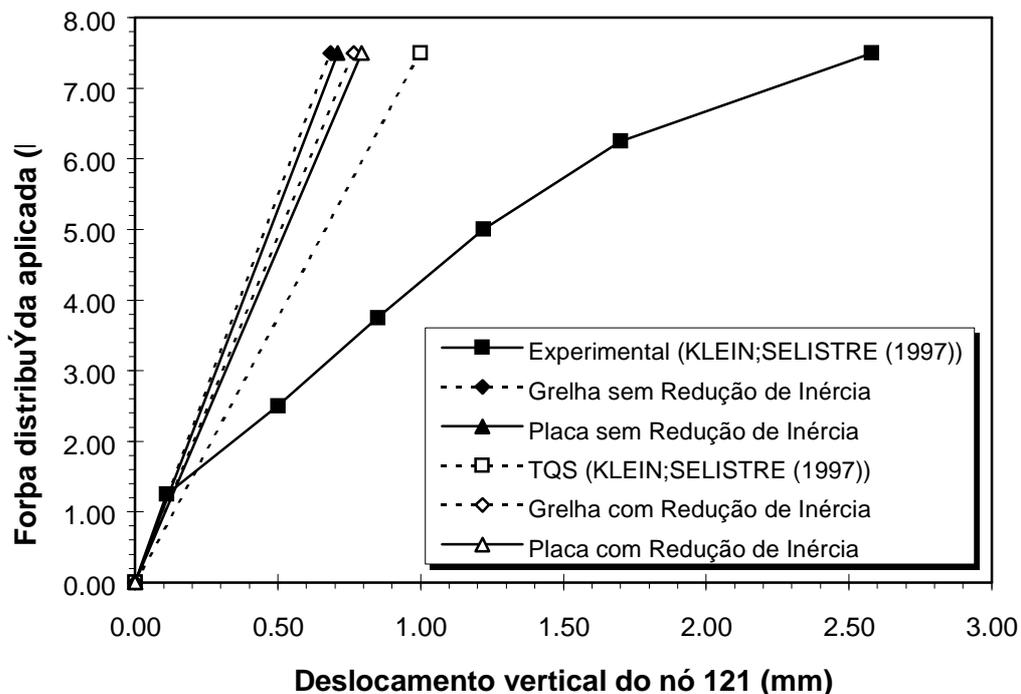
$$E_c = 3640 \text{ kN/cm}^2$$

### aço:

$$f_{yk} = 50 \text{ kN/cm}^2 (*)$$

$$E_s = 21700 \text{ kN/cm}^2$$

Os resultados de deslocamentos obtidos no nó 121 do pavimento, segundo a análise elástica linear, são mostrados no diagrama força-deslocamento da **figura 3**.



**Figura 3** - Diagrama Força-Deslocamento (modelos lineares)

Observa-se, de forma geral, que os resultados obtidos pela análise estrutural como grelha e como laje equivalente ficaram muito próximos. Analisando-se o diagrama da figura 3, observa-se a relativa proximidade dos resultados dos vários modelos lineares empregados na análise do pavimento, e a grande divergência desses valores com relação aos obtidos do ensaio. Os resultados do programa TQS, obtidos segundo uma análise como grelha, foram superiores aos resultados obtidos neste trabalho, provavelmente devido à simulação dos capitéis com barras de grelha, o que reduz a rigidez do pavimento.

## Avaliação da deformação de lajes nervuradas considerando a não-linearidade física: comparação entre valores teóricos e experimentais

Oliveira, R. S.(1); Araújo, D. L.(1); Corrêa, M. R. S.(2); Ramalho, M. A.(2)

(1) aluno do programa de doutorado da EESC - USP.

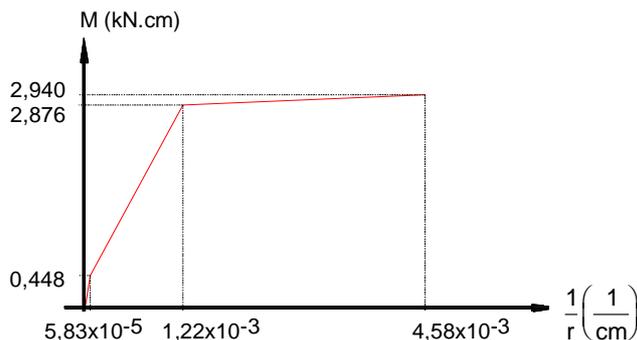
(2) professor do Dept.o de Eng. de Estruturas da EESC - USP.

Outra observação importante é a de que, apesar de os resultados estarem relativamente próximos, os modelos que desprezam a inércia à torção dos elementos estruturais (nervuras e capitéis), apresentaram deslocamentos cerca de 10% superiores aos modelos que não desprezam essa rigidez.

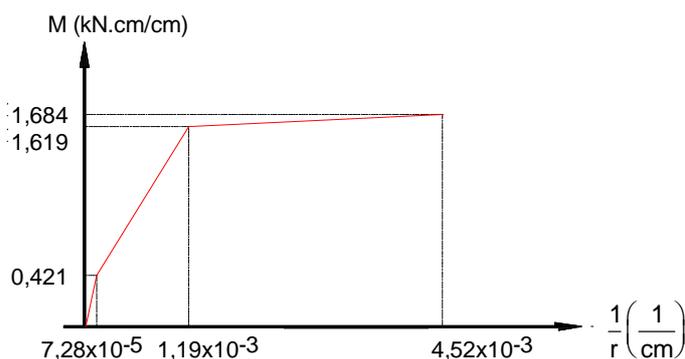
Na análise em regime não-linear foram utilizados os dois processos já apresentados. Para o emprego do modelo de grelha incorporando a formulação empírica de Branson, o pavimento foi substituído por uma grelha equivalente, sendo os capitéis substituídos por elementos de barra com inércia à flexão equivalente à da laje. A inércia à torção das nervuras não foi reduzida, e nos capitéis, foi tomada igual à da placa.

A análise não-linear segundo o modelo apresentado por OLIVEIRA (1997) foi realizada considerando-se as nervuras e a largura colaborante da mesa como elemento de barra, e os capitéis como elemento de placa. Neste caso, não foi considerada a redução da resistência das peças à torção.

De acordo com OLIVEIRA (1997), os diagramas momento-curvatura para as seções transversais dos elementos de barra e de placa (figura 2b) são os expressos na **figura 4**:



(a) nervuras ( elementos de barra)



(b) capitéis ( elementos de placa)

**Figura 4** - Diagramas momento-curvatura empregados no processamento da grelha em regime não-linear.

Os resultados obtidos dos processamentos em regime não-linear são mostrados na figura 5, juntamente com os resultados experimentais.

## Avaliação da deformação de lajes nervuradas considerando a não-linearidade física: comparação entre valores teóricos e experimentais

Oliveira, R. S.(1); Araújo, D. L.(1); Corrêa, M. R. S.(2); Ramalho, M. A.(2)

(1) aluno do programa de doutorado da EESC - USP.

(2) professor do Dept.o de Eng. de Estruturas da EESC - USP.

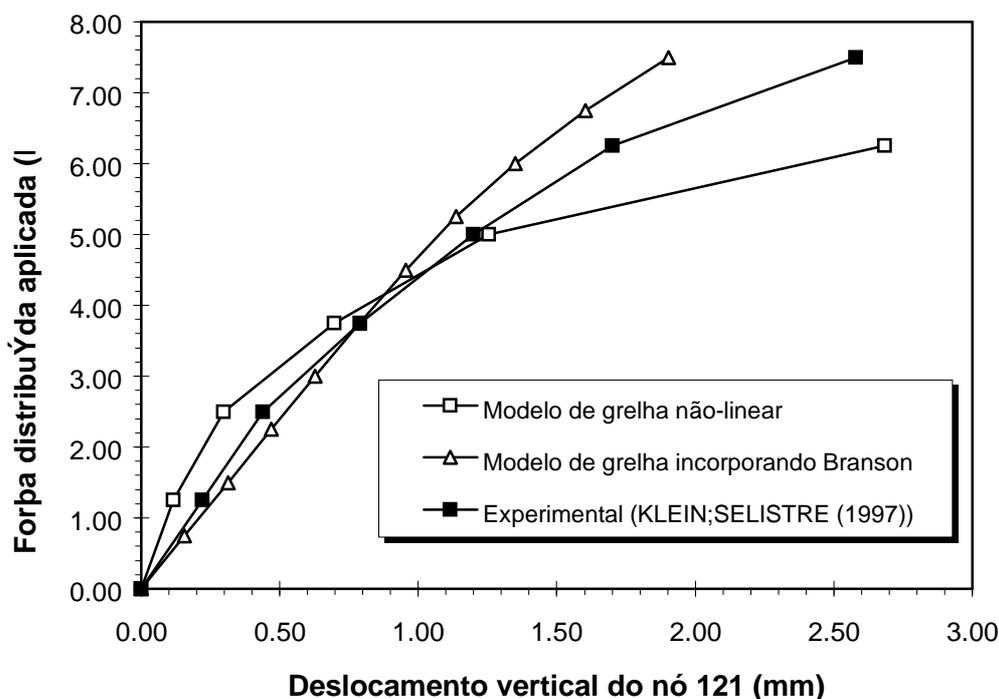


Figura 5 - Diagrama Força-Deslocamento (modelos não-lineares)

Como pode ser observado na **figura 5**, os modelos não-lineares representaram com maior realismo o comportamento da estrutura do pavimento. Os resultados obtidos utilizando o modelo de OLIVEIRA (1997) mostram que a estrutura idealizada é mais rígida que a estrutura real em baixos níveis de carregamento. Contudo, em níveis de carregamento mais elevados, a estrutura idealizada mostrou-se mais flexível. Tal comportamento deve-se à pequena inclinação do trecho III do diagrama momento-curvatura das nervuras e capitéis, o que reflete a baixa capacidade resistente teórica das seções desses elementos no estágio III, fato esse que não se confirmou na prática.

Observa-se, também, que utilizando-se a expressão empírica proposta por Branson, os resultados obtidos estão mais próximos aos experimentais do que os modelos lineares.

Deve-se salientar entretanto que, devido à substituição dos capitéis por barras equivalentes, a estrutura idealizada tornou-se mais flexível que a real em baixos níveis de carregamento, o que contribuiu para que no estágio final de carregamento seu valor estivesse próximo ao da estrutura real.

#### 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

As principais observações da análise do pavimento em laje nervurada são:



## Avaliação da deformação de lajes nervuradas considerando a não-linearidade física: comparação entre valores teóricos e experimentais

Oliveira, R. S.(1); Araújo, D. L.(1); Corrêa, M. R. S.(2); Ramalho, M. A.(2)

(1) aluno do programa de doutorado da EESC - USP.

(2) professor do Dept.o de Eng. de Estruturas da EESC - USP.

- a) Em regime linear, tanto o modelo de grelha quanto o de laje equivalente apresentaram resultados próximos entre si.
- b) Variando-se a inércia à torção nos modelos de grelha e laje em regime elástico linear, ou seja, considerando-se o valor total da inércia no Estádio I ou adotando-se apenas 1% desse valor, a variação do deslocamento foi de 10%. Essa diferença percentual foi a mesma tanto no modelo de grelha quanto no de laje equivalente.
- c) Os resultados de deslocamentos obtidos com o emprego dos modelos não lineares ficaram mais próximos dos resultados obtidos no ensaio do pavimento em laje nervurada do que os obtidos por modelos elásticos lineares que ficaram bastante aquém dos obtidos do ensaio, a partir de um determinado valor de carregamento.
- d) A análise da estrutura como grelha incorporando a expressão empírica de Branson apresentou deslocamentos próximos aos experimentais. Contudo, nas etapas iniciais de carregamento, a estrutura idealizada apresentou rigidez inferior à rigidez da estrutura real, em função da simulação das lajes dos capitéis por elementos de barra com inércia à flexão equivalente.
- e) Os modelos não-lineares abordados neste trabalho não são capazes de exprimir com fidelidade o comportamento do pavimento próximo à ruptura. Entretanto, para as solicitações às quais o pavimento provavelmente estará submetido em condições de serviço, esses modelos se apresentam suficientemente precisos para a aplicação na previsão de deslocamentos e de esforços em projetos usuais de engenharia.

### 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS - ABNT (1978). NBR 6118 – *Projeto e execução de obras de concreto armado*. Rio de Janeiro.

BARBIRATO, C.B.C. (1997). *Contribuições à análise de pavimentos de edifícios em laje nervurada*. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

CARVALHO, R.C. (1994). *Análise não-linear de pavimentos de edifícios de concreto através da analogia de grelha*. São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

CORRÊA, M.R.S.(1991). *Aperfeiçoamento de modelos usualmente empregados no projeto de sistemas estruturais de edifícios*. São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

KLEIN, D.L.; SELISTRE, S.L.C. (1997). *Análise numérico-experimental de lajes nervuradas submetidas a cargas uniformemente distribuídas*. In: JORNADAS SUL-AMERICANAS DE



## Avaliação da deformação de lajes nervuradas considerando a não-linearidade física: comparação entre valores teóricos e experimentais

Oliveira, R. S.(1); Araújo, D. L.(1); Corrêa, M. R. S.(2); Ramalho, M. A.(2)  
(1) aluno do programa de doutorado da EESC - USP.  
(2) professor do Dept.o de Eng. de Estruturas da EESC - USP.

ENGENHARIA ESTRUTURAL, 28, São Carlos, 1997. *Estruturas e Fundações*. São Carlos, EESC-USP/ASAE, v.1, p.249-258.

OLIVEIRA, R.S. (1997). *Análise de pavimentos de edifícios de concreto armado com a consideração da não-linearidade física*. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

RAMALHO, M.A.(1990). *Sistema para análise de estruturas considerando interação com meio elástico*. São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

### 6. CONTATOS

Universidade de São Paulo - Escola de Engenharia de São Carlos  
Departamento de Engenharia de Estruturas  
Av. Dr. Carlos Botelho, 1465 CEP: 13560-970, São Carlos, SP  
Fax: (016) 2719241 e-mail: [correa@sc.usp.br](mailto:correa@sc.usp.br)